tienten x/λ vorkommen. Lediglich die Potentialgleichung macht eine Ausnahme. Sie bewirkt, daß die Anodenfalldicke schwächer als mit λ variiert. Das bedeutet praktisch, daß, wenn etwa $\lambda \to \lambda' = \lambda/3$, die Anodenfalldicke d' nach dieser Änderung in den Grenzen

$$d > d' > \frac{d}{3}$$

liegt. Die Anodenfallspannung wird nicht wesentlich beeinflußt.

b) Der Fehler durch Vernachlässigung der Anregungsstöße. Bei der Ableitung unserer Stromgleichungen (§ 3) haben wir angenommen, daß alle Stöße der Elektronen im Anodenfallgebiet elastisch verlaufen. Ausgenommen von dieser Annahme waren die Stöße, die zur Ionisation des gestoßenen Atoms führten. Es tritt nun auch der Fall ein, daß Elektronen das gestoßene Atom zur Emission einer Spektrallinie anregen und dadurch Energie verlieren. Diese Elektronen nehmen im restlichen Anodenfall nicht mehr die nötige Energie auf, um als Ursache für einen Ionisationsprozeß in Frage kommen. Setzen wir an, daß alle Elektronen, die nach Erreichen der Anregungsenergie stoßen, so viel Energie abgeben, daß sie hernach nicht mehr auf die Ionisationsenergie beschleunigt werden können, so ergibt sich eine Erhöhung der Spannung von 18,7 V auf 19 V. Dabei ist zweifellos der erste Wert bei sonst unveränderten Daten richtiger als der zweite, weil wir einen zu großen Verlust an Elektronen eingesetzt haben.

c) Statistische Effekte. In derselben Größenordnung wirkt sich eine exakte Berücksichtigung der statistischen Verteilung der Elektronenbewegung am Beginn des freien Falles aus. Wir haben in § 6 gezeigt, daß es für das Ergebnis keine Änderung bedeutet, wenn wir den Anodenfall zu Beginn mittels freifallender Elektronen oder mittels Beweglichkeiten berechnen. Anders ist es mit der Energieverteilung der Elektronen in der ungeordneten Bewegung. Die Zahl derjenigen Teilchen, die eine Energie $\approx e \cdot U_i$ mitbringen, ist aber so gering, daß sie ebenso wie die Elektronen, die durch Rekombination und Anregungsstöße verloren gehen, vernachlässigt werden können.

Energie-Impuls- und Ladungsdichte in der Kristensen-Møller-Theorie

Von Heinrich Gaus

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **9a**, 81—90 [1954]; eingegangen am 22. September 1953)

Bei nichtlokalen Feldtheorien läßt sich (nach Ôno) ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor bestimmen, indem man die Nichtlokalität durch eine unendliche Reihe mit den höheren Ableitungen der Felder ersetzt und für die einzelnen Summanden den Tensor nach den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie berechnet. Nach diesem Verfahren wird für die Kristensen-Møller-Theorie ein Ausdruck für die Energie-Impuls-Dichte bestimmt. Der sich durch Integration über den Raum ergebende Gesamtimpuls ist identisch mit einem von Pauli durch Integration des Erhaltungssatzes gewonnenen Ausdruck. Es wird noch der Gesamtdrehimpuls durch Integration des Tensors berechnet. Ladungsdichte und Gesamtladung werden in analoger Weise bestimmt.

Im Rahmen der sogenannten nichtlokalen Feldtheorien ist kürzlich von Kristensen und Møller[1] für die Wechselwirkung von Nukleonen mit neutralen skalaren (oder pseudoskalaren) Mesonen eine Theorie untersucht worden, die nach dem üblichen Variationsverfahren aus der Lagrange-Funktion

$$J = \int L_\mathrm{n}\, \mathrm{d}^4x + \int L_\mathrm{m}\, \mathrm{d}^4x + \int F\,(x'x''x''')\, \overline{\psi}\,(x')\, u\,(x'')\, \psi\,(x''')\, \mathrm{d}^4x'\, \mathrm{d}^4x''\, \mathrm{d}^4x''' \tag{1}$$

folgt, worin L_n und L_m die bekannten Ausdrücke für die Lagrange-Dichten der freien Nukleonen bzw. Mesonen sind. Dabei ist der sogenannte Formfaktor F eine Invariante, deren Wert nur von der relativen Lage der Punkte x', x'', x''' zueinander abhängt.

Für diese Theorie hat Pauli[2] die Integrale über Energie-Impuls- und Ladungsdichte berechnet. Im folgenden sollen Ausdrücke für die Dichten selbst abgeleitet werden. Dabei ist das Ergebnis nicht an die spezielle Gestalt der Feldgleichungen (1) gebunden, sondern gilt für jede aus einem Variationsverfahren folgende nichtlokale Theorie, deren Formfaktor lediglich eine Funktion der Abstände dreier Raumzeitpunkte $|\, x'' - x''' \,|$, $|\, x''' - x' \,|$, $|x' - x''|$ ist. Das benutzte Rechenverfahren stammt von Ôno[3] und wurde von ihm auf Theorien mit

[1] P. Kristensen u. C. Møller, Kgl. danske Vidensk. Selsk., mat.-fysike Medd. **27**, Nr. 7 [1952].

[2] W. Pauli, Nuovo Cimento **10**, 648 [1953].

[3] Y. Ôno, Progr. theor. Physics **6**, 898 [1951].

von zwei Punkten abhängenden Formfaktoren angewandt. Man ersetzt dabei zunächst die Nichtlokalität durch höhere Ableitungen der Felder, so daß man eine „lokale" Lagrange-Funktion erhält, bestimmt den Energie-Impuls-Tensor nach den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie und drückt im Ergebnis die höheren Ableitungen wieder durch den Formfaktor aus. Die Bestimmung der Ladungsdichte ist in analoger Weise möglich.

Bei „lokalen" Feldtheorien läßt sich bekanntlich ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor nach der erwähnten Methode leicht berechnen, wenn man die Lagrangesche Dichte als Funktion der Feldgrößen und des „metrischen Feldes" $g_{\nu\mu}(x)$ als skalare Dichte

$$\mathfrak{L}(x) = L(x)\sqrt{-g(x)}\,, \quad g = \operatorname{Det} \| g_{\nu\mu} \| \tag{2}$$

invariant in bezug auf beliebige krummlinige Koordinaten-Transformationen schreiben kann[4]. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, in dem wir im folgenden bleiben werden, geschieht dies lediglich als rechnerisches Hilfsmittel. Man betrachtet eine Koordinatentransformation

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)\,,$$

wobei ξ eine infinitesimale Verrückung ist, die nur in einem infinitesimalen Gebiet x von Null verschieden ist. Bedeutet $\bar{q}(\bar{x})$ eine der erwähnten Größen im überstrichenen System und ist

$$\delta^* q \equiv \bar{q}(x) - q(x) = \delta q - \frac{\partial q(x)}{\partial x^{\nu}}\,\xi^{\nu}\,,$$

wobei

$$\delta q \equiv \bar{q}(\bar{x}) - q(x)\,,$$

so ist wegen der Invarianz von $\mathfrak{L}(x)\,\mathrm{d}^4x$

$$\int \delta^* \mathfrak{L}(x)\,\mathrm{d}^4x = 0\,,$$

wobei das Integral nur über das erwähnte infinitesimale Gebiet erstreckt zu werden braucht. Hierin liefern wegen des Variationsprinzipes die Teile mit den Variationen der Feldgrößen keinen Beitrag, und die Ausrechnung von $\delta^* g^{\nu\mu}$ zeigt, daß

$$T_{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{\nu\mu}} + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) \tag{3}$$

ein symmetrischer Tensor ist, dessen (kovariante) Divergenz verschwindet.

Die direkte Übertragung dieser Methode auf die nichtlokale Theorie erscheint schwierig[3]. Zunächst wird die invariante Schreibweise der nichtlokalen Lagrangeschen Dichte etwas kompliziert, weil man die in den verschiedenen Punkten (x', x'', x''') gegebenen Feldkomponenten — sofern es sich nicht um Skalare handelt — durch Paralleltransport an dieselbe Stelle bringen muß. Vor allem aber enthält der Formfaktor (invariant als Funktion der geodätischen Abstände zwischen den drei Punkten) die Stellen x' usw. explizit, so daß bei Variation die Verrückung ξ nicht nur in Gestalt von $\delta^* g^{\nu\mu}$, d. h. differenziert, auftritt. Man erhält deshalb bei der Variation als Faktor von $\xi^{\nu}(x)$ keine Divergenz.

Die Variation ergibt lediglich — auch ohne invariante Schreibweise der nichtlokalen Lagrangeschen Dichte — die Gl. (25) von Kristensen und Møller[1]. Mit

$$\mathfrak{L}(x'x''x''') = F(x'x''x''')\,\bar{\psi}(x')\,u(x'')\,\psi(x''') \cdot \sqrt{-g(x')}\sqrt{-g(x'')}\sqrt{-g(x''')}$$

ist nämlich, wenn x' usw. cartesische Koordinaten sind,

$$\begin{aligned}\delta^*\mathfrak{L} = &-\frac{1}{2}F\,\bar{\psi}(x')\,u(x'')\,\psi(x''') \\ &\cdot \mathring{g}_{\nu\mu}\left(\delta^* g^{\nu\mu}(x') + \delta^* g^{\nu\mu}(x'') + \delta^* g^{\nu\mu}(x''')\right) \\ &-\left(\xi^{\nu}(x')\,\frac{\partial F}{\partial x'^{\nu}} + \xi^{\nu}(x'')\,\frac{\partial F}{\partial x''^{\nu}} + \xi^{\nu}(x''')\,\frac{\partial F}{\partial x'''^{\nu}}\right) \\ &\cdot \bar{\psi}(x')\,u(x'')\,\psi(x''') + \ldots\,,\end{aligned}$$

wobei die Punkte Glieder mit den Variationen der Felder bedeuten und

$$\mathring{g}_{\nu\mu} = \mathring{g}^{\nu\mu} = \begin{Bmatrix} -1 \text{ für } \nu = \mu = 0 \\ 1 \text{ für } \nu = \mu = 1, 2, 3 \\ 0 \text{ für } \nu \neq \mu \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Führt man die gleiche Variation in den wechselwirkungsfreien Teilen der Lagrange-Funktion (2) aus und bezeichnet die Argumente von ξ überall mit x, so erhält man

$$\begin{aligned} &-\mathring{T}_{\nu\mu}{}^{|\mu} \\ &+\int \mathrm{d}^4x''\mathrm{d}^4x'''\,\bar{\psi}_{|\nu}(x)\,u(x'')\,\psi(x''')\,F(x, x'', x''') \\ &+\int \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4x'''\,\bar{\psi}(x')\,u_{|\nu}(x)\,\psi(x''')\,F(x', x, x''') \\ &+\int \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4x''\,\bar{\psi}(x')\,u(x'')\,\psi_{|\nu}(x)\,F(x', x'', x) = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

worin $\mathring{T}_{\nu\mu}$ der Tensor der wechselwirkungsfreien Teile ist. (Wir schreiben statt $\partial/\partial x^{\nu}$ auch einfach ν als Index mit einem senkrechten Strich davor.)

Schreibt man hierfür

$$-\mathring{T}_{\nu\mu}{}^{|\mu} - T^{(W)}_{\nu\mu}{}^{|\mu} = 0 \tag{6}$$

[4] Z. B. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer-Verlag, Berlin; W. Pauli, Encyk. d. math. Wiss. V, 2 [1921].

mit

$$T^{(W)|\mu}_{\nu\mu} = -\int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, F(x', x'', x''')$$

$$\cdot \left\{ \delta^4(x-x') \frac{\partial \bar{\psi}(x')}{\partial x'^{\nu}} u(x'') \psi(x''') \right. \quad (7)$$

$$\left. + \delta^4(x-x'') \bar{\psi} \frac{\partial u}{\partial x''^{\nu}} \psi + \delta^4(x-x''') \bar{\psi} u \frac{\partial \psi}{\partial x'''^{\nu}} \right\},$$

so hat man in (7) eine Differentialgleichung für $T^{(W)}_{\nu\mu}$, aus der man nach Pauli[2] die räumlichen Integrale von $T^{(W)}_{\nu 0}$ eindeutig bestimmen kann. Pauli hat ferner einen Lösungsansatz für $T^{(W)}_{\nu\mu}$ selbst angegeben. Wir wollen jedoch im folgenden zur Bestimmung von $T^{(W)}_{\nu\mu}$ die erwähnte Methode von Ôno[3] benutzen, die direkt einen symmetrischen Tensor liefert.

§ 1. Bericht über die Methode von Ôno

Wir referieren die Methode von Ôno[3] für den Fall von zwei skalaren Feldern:

$$J = \int d^4x'\, d^4x''\, \Phi(x')\, F(x', x'')\, \varphi(x'') .$$

Wegen der Translationsinvarianz ist F nur eine Funktion des einen Vektors $x' - x''$

$$F(x', x'') = F(x' - x'')$$

und kann wegen der Rotationsinvarianz nur vom Betrage dieses Vektors abhängen, so daß in

$$F(x' - x'') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, \tilde{F}(k)\, e^{ik_\nu (x' - x'')^\nu}$$

die Fourier-Transformierte $\tilde{F}(k)$ nur vom Betrag des Vektors k abhängen kann. Man kann also setzen

$$\tilde{F}(k) = f(-k^2) \quad (8)$$

(k^2 bedeutet im folgenden immer $k^\nu k_\nu$).

Man entwickelt nun f nach Taylor

$$f(-k^2) = \sum_p \lambda_p (-k^2)^p \quad (9)$$

und ersetzt bei der Multiplikation mit dem e-Faktor $-k^2$ durch den Laplace-Operator. So erhält man

$$J = \sum_p \lambda_p \int \Phi(x) \Box^p \varphi(x)\, d^4x ,$$

was man allgemein kovariant schreiben kann:

$$J = \sum_p \lambda_p \int \Phi(x) \Box_g{}^p \varphi(x) \sqrt{-g(x)}\, d^4x ,$$

wobei

$$\Box_g = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\varrho} g^{\varrho\lambda} \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} . \quad (10)$$

Mit

$$\int \delta_g{}^* \left(\Phi(x) \Box_g{}^p \varphi(x) \sqrt{-g(x)} \right) d^4x$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1} \int \Box_g{}^m \Phi\, (\delta_g{}^* \Box_g)\, \Box_g{}^{p-m-1} \varphi \sqrt{-g}\, d^4x$$

$$+ \int \Phi \Box_g{}^p \varphi\, (\delta_g{}^* \sqrt{-g})\, d^4x \quad (11)$$

und (an der „Stelle“ $g_{\nu\mu}(x) \equiv \mathring{g}_{\nu\mu}$, d. h. cartesische Koordinaten)

$$\delta^* \Box_g = -\frac{1}{2} \delta^* g^{\mu\nu|\lambda} \mathring{g}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$+ \delta^* g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \delta^* g^{\mu\nu}{}_{|\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

erhält man nach (3) so für einen p-Summanden von (10)

$$T^{(p)}_{\mu\nu}(x) = \sum_{m=0}^{p-1} \Big\{ \big[(\Box^m \Phi^{|\lambda}) (\Box^{p-m-1} \varphi_{|\lambda})$$

$$+ (\Box^m \Phi)(\Box^{p-m} \varphi) \big] \mathring{g}_{\mu\nu} - (\Box^m \Phi_{|\mu})(\Box^{p-m-1} \varphi_{|\nu})$$

$$- (\Box^m \Phi_{|\nu})(\Box^{p-m-1} \varphi_{|\mu}) \Big\} - \Phi \Box^p \varphi\, \mathring{g}_{\mu\nu} .$$

Für die Fourier-Transformierte hat man hiernach

$$\tilde{T}^{(p)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k'\, \tilde{\Phi}(k-k')\, \tilde{\varphi}(k') \Big\{ -\mathring{g}_{\mu\nu} (-k'^2)^p$$

$$+ \big[-k^\lambda k_\lambda{}' \mathring{g}_{\mu\nu} + (k-k')_\mu k_\nu{}' + (k-k')_\nu k_\mu{}' \big]$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{p-1} \big[(-[k-k']^2)^m (-k'^2)^{p-m-1} \big] \Big\} , \quad (12)$$

worin die Summation über m ausgeführt werden kann

$$\sum_m = \frac{(-[k-k']^2)^p - (-k'^2)^p}{-(k-k')^2 + k'^2} . \quad (13)$$

Nach Multiplikation mit λ_p kann die Summation über p, wie man sieht, ohne weiteres nach (9) ausgeführt werden und f nach (8) durch $\tilde{F}$ ersetzt werden. Das Ergebnis ist, wie es sein muß, symmetrisch in Φ und φ, was man erkennt, wenn man (13) in (12) einsetzt und die $\mathring{g}_{\mu\nu}$-Terme zusammenfaßt.

§ 2. Ausrechnung des Energie-Impuls-Tensors

Wir können bei der Kr.-M.-Theorie in analoger Weise vorgehen. Wegen der Translationsinvarianz ist

$$F(x', x'', x''') = F(x' - x'', x''' - x'') = F(\xi, \eta)$$

und kann wegen der Rotationsinvarianz nur von den Beträgen und dem skalaren Produkt der beiden Vektoren ξ und η abhängen. Dem entspricht es, daß in

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4k_1\, d^4k_2\, \tilde{F}(k_1, k_2)\, e^{ik_1{}^\nu \xi_\nu}\, e^{ik_2{}^\nu \eta_\nu}$$

$\tilde{F}$ nur von den Beträgen und dem skalaren Produkt der beiden Vektoren k_1 und k_2 abhängen kann, denn gleichzeitige Drehung von ξ und η ist unter dem Integral dasselbe wie gleichzeitige Drehung von k_1 und k_2. Anstatt des skalaren Produktes von k_1 und

k_2 können wir natürlich auch den Betrag von $(k_1 + k_2)$ als dritte Variable betrachten und also setzen

$$\widetilde{F}(k_1, k_2) = f(-k_1^2;\; -k_2^2;\; -[k_1 + k_2]^2)\,. \tag{14}$$

Die Funktion $f(a; b; c)$ ist hierdurch für den ganzen Wertebereich ihrer drei Variablen festgelegt, denn sind a, b, c drei beliebige Zahlen, so kann man infolge der pseudo-euklidischen Metrik immer zwei Vierervektoren k_1 und k_2 so bestimmen, daß

$$k_1^2 = a, \quad k_2^2 = b, \quad (k_1 + k_2)^2 = c\,.$$

Es genügt z. B.

$$k_1 = (t_1, x, 0, 0)\,, \quad k_2 = (t_2, 0, y, 0)$$

zu setzen. Dann soll also

$$x^2 - t_1^2 = a\,, \quad y^2 - t_2^2 = b\,,$$
$$x^2 + y^2 - t_1^2 - t_2^2 - 2t_1 t_2 = c$$

sein. Im Falle $a > 0$ läßt sich die erste Bedingung für jedes t_1 durch passende Wahl von $|x|$, im Falle $a < 0$ für jedes x durch passende Wahl von $|t_1|$ erfüllen. Entsprechend die zweite Bedingung. Es bleibt

$$t_1 t_2 = \frac{1}{2}(a + b - c) \text{ für } a > 0, b > 0\,,$$
$$\pm\sqrt{x^2 - a}\;\; t_2 = \frac{1}{2}(a + b - c) \text{ für } a < 0, b > 0\,,$$
$$\pm\sqrt{x^2 - a}\,\sqrt{y^2 - b} = \frac{1}{2}(a + b - c) \text{ für } a < 0, b < 0$$

zu erfüllen, was immer möglich ist. —

Wir entwickeln nun wieder f nach Taylor

$$f = \sum_{q\,r\,s} \lambda_{q\,r\,s}(-k_1^2)^q(-k_2^2)^r(-[k_1 + k_2]^2)^s\,, \tag{15}$$

wodurch wir F in der Form

$$F(x' - x'', x''' - x'') = \sum_{q\,r\,s} \lambda_{q\,r\,s}\,\Box'^q\,\Box'''^r\,\Box''^s\big(\delta^4(x' - x'')\,\delta^4(x''' - x''')\big)$$

erhalten. Hiermit wird

$$\int F(x' - x'', x''' - x'')\,\overline{\psi}(x')\,u(x'')\cdot\psi(x''')\,d^4x'\,d^4x''\,d^4x''' = \sum_{q\,r\,s}\lambda_{q\,r\,s}\int\big(\Box^q\overline{\psi}(x)\big)\big(\Box^s u(x)\big)\big(\Box^r\psi(x)\big)\,d^4x\,, \tag{16}$$

was wir wieder allgemein kovariant schreiben können. Betrachten wir der Einfachheit halber $\overline{\psi}$ und ψ vorübergehend als Skalare (vgl. Anhang), so haben wir wieder $\Box \to \Box_g$ (10) und $d^4x \to \sqrt{-g(x)}\,d^4x$ zu ersetzen.

Wir betrachten nun zunächst wieder den Beitrag eines qrs-Summanden. Da die Variation dieses Ausdruckes in eine Summe mit den Variationen der $\Box_g^q$, $\Box_g^r$, $\Box_g^s$ und des $\sqrt{-g(x)}$-Faktors zerfällt, können wir das Ergebnis unmittelbar nach (12), (13) hinschreiben, indem wir einmal

$$p = q; \quad \varphi = \overline{\psi}; \quad \Phi = (\Box^r\psi)(\Box^s u);$$

also

$$\widetilde{\Phi}(k - k') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k''\,(-k''^2)^r\,\widetilde{\psi}(k'')\,(-[k - k' - k'']^2)^s\,\widetilde{u}(k - k' - k'')\,,$$

dann $p = r$ usw. und $p = s$ usw. setzen und addieren. Dabei ist zu beachten, daß der von der Variation des $\sqrt{-g(x)}$-Faktors herrührende erste Summand in der geschweiften Klammer von (12) natürlich nur einmal auftritt. Bei dem sich so ergebenden Ausdruck ist nach Multiplikation mit $\lambda_{q\,r\,s}$ die Summation über qrs nach (15) wieder ohne weiteres möglich. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}^{(W)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4k'\,d^4k''\cdot\Big\{&\widetilde{\overline{\psi}}(k')\,\widetilde{\psi}(k'')\,\widetilde{u}(k - k' - k'')\,f\big(-k'^2;\,-k''^2;\,-(k - k' - k'')^2\big)\big(-\mathring{g}_{\mu\nu}\big)\\
&+\Big[\widetilde{\overline{\psi}}(k')\,\widetilde{\psi}(k'')\,\widetilde{u}(k - k' - k'')\,\frac{f(-(k-k')^2;\,-k''^2;\,-(k-k'-k'')^2) - f(-k'^2;\,-k''^2;\,-(k-k'-k'')^2)}{-(k-k')^2 + k'^2}\\
&+\widetilde{\overline{\psi}}(k - k' - k'')\,\widetilde{\psi}(k')\,\widetilde{u}(k'')\,\frac{f(-(k-k'-k'')^2;\,-(k-k')^2;\,-k''^2) - f(-(k-k'-k'')^2;\,-k'^2;\,-k''^2)}{-(k-k')^2 + k'^2}\\
&+\widetilde{\overline{\psi}}(k'')\,\widetilde{\psi}(k - k' - k'')\,\widetilde{u}(k')\,\frac{f(-k''^2;\,-(k-k'-k'')^2;\,-(k-k')^2) - f(-k''^2;\,-(k-k'-k'')^2;\,-k'^2)}{-(k-k')^2 + k'^2}\Big]\cdot\\
&\cdot\big[-k^\lambda k_\lambda'\,\mathring{g}_{\mu\nu} + (k - k')_\mu k_\nu' + (k - k')_\nu k_\mu'\big]\Big\}\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Das Ersetzen von f durch $\widetilde{F}$ nach (14) ist in einfacher Weise nur in Brüchen bei den ersten f-Termen möglich, indem man z. B. $k_1 = k - k'$, $k_2 = -k''$ setzt usw. Bei den anderen f ist der Übergang, wie oben gezeigt, zwar ebenfalls möglich, aber nicht ohne Fallunterscheidungen auszuführen. Man kann deshalb in (17) den Formfaktor schlecht im Ortsraum darstellen. Wir schreiben noch $T_{\mu\nu}^{(W)}$ im Ortsraum in einer Form hin, die man aus (17) erhält, wenn man in den einzelnen Summanden in (17) neue Variable k', k'' so einführt, daß die Felder die gleichen Argumente erhalten, und dann $k''' = k - k' - k''$ setzt:

$$T_{\mu\nu}^{(W)}(x) = \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''')\, Z_{\mu\nu}(x - x'; x - x''; x - x'''), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4k'\, d^4k''\, d^4k''' \cdot \Big\{ & -\mathring{g}_{\mu\nu} f(-k'^2; -k'''^2; -k''^2) \\ & + [-\mathring{g}_{\mu\nu}(k' + k'' + k''')^\lambda k_\lambda' + (k'' + k''')_\mu k_\nu' + (k'' + k''')_\nu k_\mu'] \frac{\widetilde{F}(k''' + k''; -k''') - f}{-(k''' + k'')^2 + k'^2} \\ & + [-\mathring{g}_{\mu\nu}(k' + k'' + k''')^\lambda k_\lambda''' + (k' + k'')_\mu k_\nu''' + (k' + k'')_\nu k_\mu'''] \frac{\widetilde{F}(-k'; k' + k'') - f}{-(k' + k'')^2 + k'''^2} \\ & + [-\mathring{g}_{\mu\nu}(k' + k'' + k''')^\lambda k_\lambda'' + (k' + k''')_\mu k_\nu'' + (k' + k''')_\nu k_\mu''] \frac{\widetilde{F}(-k'; -k''') - f}{-(k' + k''')^2 + k''^2} \Big\} \\ & \cdot e^{ik'(x - x') + ik''(x - x'') + ik'''(x - x''')}, \qquad \text{wobei } f = f(-k'^2; -k'''^2; -k''^2). \end{aligned}$$

Man sieht, daß in (17) bzw. (18) jeweils einer der Brüche verschwindet, wenn f von einem seiner drei Argumente nicht abhängt, d. h. der Formfaktor nur eine Funktion von zwei „Seiten" ist. (In diesem Falle kann man auch überall zu $\widetilde{F}$ übergehen.) Im Grenzfalle der lokalen Theorie $f \equiv \widetilde{F} \equiv 1$ bleibt nur der erste Summand der geschweiften Klammer, der dann das Übliche liefert. Mit der evidenten Symmetrie in μ, ν und mit dem Verschwinden der Divergenz, das wir gleich direkt prüfen werden, hat dieser Tensor also alle Eigenschaften, die von ihm verlangt werden müssen, wobei die ψ, $\overline{\psi}$ auch Spinoren sein können. Die Rechnung, die zu (17), (18) führt, insbesondere die Taylor-Entwicklung (15), können wir als ein lediglich heuristisches Verfahren zur „Erratung" des richtigen Tensors ansehen.

Um direkt zu verifizieren, daß die Divergenz des Tensors auf Grund der Feldgleichungen verschwindet, und für die weitere Rechnung ist es bequem, die Terme mit $\widetilde{F}$ und f getrennt zu behandeln; setzt man nämlich

$$Z_{\mu\nu} = Z_{\mu\nu}^{(F)} + Z_{\mu\nu}^{(f)}, \tag{19}$$

so gilt, wie wir sehen werden, identisch (d. h. ohne Benutzung der Feldgleichungen)

$$Z_{\mu\nu}^{(f)|\nu} = 0, \quad (20) \qquad \int Z_{\mu 0}^{(f)}\, d^3x = 0, \tag{21}$$

$$\int (x_\lambda Z_{\mu 0}^{(f)} - x_\mu Z_{\lambda 0}^{(f)})\, d^3x = 0. \tag{22}$$

Bei Bildung der Divergenz erhalten wir in (18) durch Multiplikation mit $i(k' + k'' + k''')^\nu$ als Faktor von $(-f)$

$$-f\{i(k' + k'' + k''')_\mu - ik_\mu' - ik_\mu''' - ik_\mu''\} = 0. \tag{23}$$

Dementsprechend wird

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(W)|\nu} = & \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ & \cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4k'\, d^4k''\, d^4k''' \{-ik_\mu' \widetilde{F}(k''' + k''; k''') \\ & - ik_\mu''' \widetilde{F}(-k'; k' + k'') - ik_\mu'' \widetilde{F}(-k'; -k''')\} \\ & \cdot e^{ik'(x - x') + ik''(x - x'') + ik'''(x - x''')} \\ = & \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ & \cdot \Big\{ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} [F(x - x''; x''' - x'')\, \delta^4(x - x')] \\ & + \frac{\partial}{\delta x'''^\mu} [F(x' - x''; x - x'')\, \delta^4(x - x''')] \\ & + \frac{\partial}{\partial x''^\mu} [F(x' - x; x''' - x)\, \delta^4(x - x'')] \Big\}, \end{aligned} \tag{24}$$

was nach Herüberwerfen der Ableitungen auf die Feldfunktionen identisch mit (7) ist.

§ 3. Gesamtimpuls

Bei der Berechnung des Gesamtimpulses

$$P_\mu^{(W)} = \int T_{\mu 0}^{(W)}\, d^3x \tag{25}$$

ist die Integration über d^3x in (18) sofort ausführbar und gibt den Faktor $\delta^3(k' + k'' + k''')$. Wir fassen zunächst wieder die f-Terme zusammen und erhalten, wenn wir in den einzelnen Summanden gleich $k_i' + k_i'' + k_i''' = 0$ berücksichtigen, als Faktor von $(-f)$:

$$\begin{aligned} & -f\Big\{\mathring{g}_{\mu 0} + \frac{k_\mu'(k_0'' + k_0''' - k_0')}{(k_0''' + k_0'')^2 - k_0'^2} + \frac{k_\mu'''(k_0'' + k_0' - k_0''')}{(k_0' + k_0'')^2 - k_0'''^2} \\ & \quad + \frac{k_\mu''(k_0' + k_0''' - k_0'')}{(k_0' + k_0''')^2 - k_0''^2}\Big\}\, \delta^3(k' + k'' + k''') \\ & = -f\left(\mathring{g}_{\mu 0} + \frac{k_\mu' + k_\mu''' + k_\mu''}{k_0' + k_0'' + k_0'''}\right) \delta^3(k' + k'' + k''') = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Es bleibt also (mit den eben hingeschriebenen Faktoren von $\widetilde{F}$):

$$P_\mu^{(W)}(t) = \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''')$$
$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^9} \int \frac{d^4k'\, d^4k''\, d^4k'''}{k_0' + k_0'' + k_0'''}\, \delta^3(k' + k'' + k''')$$
$$\cdot \left\{k_\mu' \widetilde{F}(k''' + k''; -k''') + k_\mu''' \widetilde{F}(-k'; k' + k'')\right.$$
$$\left. + k_\mu'' \widetilde{F}(-k'; -k''')\right\} \cdot e^{-ik_i' x_i - ik_i'' x_i'' - ik_i''' x_i'''}$$
$$\cdot e^{-ik'^0(t-t') - ik''^0(t-t'') - ik'''^0(t-t''')}.$$

Wir ersetzen nun $k_\mu' \to i\dfrac{\partial}{\partial x'^\mu}$ usw. und setzen dann

$$k^\mu = k'^\mu + k''^\mu + k'''^\mu,$$

wobei wir im ersten Summanden k an Stelle von k', im zweiten Summanden k an Stelle von k''', im dritten k an Stelle von k'' als neue Variable einführen. Integrieren wir noch mittels der δ-Funktion über $\delta^3 k$ und dann in den einzelnen Summanden über die Argumente des Formfaktors, so erhalten wir

$$P_\mu^{(W)}(t) = \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''')$$
$$\cdot \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk^0}{(-k^0)}\, i \tag{27}$$
$$\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[F(x' - x''; x''' - x'')\, e^{-ik^0(t-t')}\right] \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x''^\mu} \left[F(x' - x''; x''' - x'')\, e^{-ik^0(t-t'')}\right]$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x'''^\mu} \left[F(x' - x''; x''' - x'')\, e^{-ik^0(t-t''')}\right] \right\}.$$

Hier können wir im letzten Summanden

$$\frac{\partial}{\partial x''^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial}{\partial x'''^\mu} + \delta_\mu^0\, ik^0$$

setzen, wodurch

$$P_\mu^{(W)}(t) = \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''')$$
$$\cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{dk^0}{k^0}\, i \left\{ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[F\left(e^{-ik^0(t-t'')} - e^{-ik^0(t-t')}\right)\right] \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x'''^\mu} \left[F\left(e^{-ik^0(t-t'')} - e^{-ik^0(t-t''')}\right)\right] \right\} \tag{28}$$
$$\left. + \delta_\mu^0 \frac{1}{2\pi} \int dk^0 F e^{-ik^0(t-t'')} \right] \text{ wird.}$$

Wegen der Differenzen der e-Funktionen bleibt der Integrand für $k^0 = 0$ endlich, so daß der Integrationsweg in der k^0-Ebene gleichgültig ist. Das muß so sein, weil in (17), (18) die Integranden keinerlei Singularitäten aufweisen. Mit

$$\varepsilon(t) \equiv \begin{Bmatrix} -1 \text{ für } t < 0 \\ +1 \text{ für } t > 0 \end{Bmatrix} = HW \frac{1}{\pi i} \int \frac{e^{ik^0 t}}{k^0}\, dk^0$$

erhalten wir nach Herüberwerfen der Ableitungen

$$P_\mu^{(W)}(t) = -\int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, F(x'\, x''\, x''')$$
$$\cdot \left\{ \frac{\partial \overline{\psi}(x')}{\partial x'^\mu}\, u(x'')\, \psi(x''') \cdot \frac{1}{2} \left[\varepsilon(t' - t) - \varepsilon(t'' - t)\right] \right.$$
$$+ \overline{\psi}(x')\, u(x'') \frac{\partial \psi(x''')}{\partial x'''^\mu}\, \frac{1}{2} \left[\varepsilon(t''' - t) - \varepsilon(t'' - t)\right]$$
$$\left. - \delta_\mu^0\, \delta(t'' - t)\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \right\}. \tag{29}$$

Dies ist der von Pauli [l. c.[2], Gl. (8)] aus (24) berechnete Ausdruck. Man sieht, daß $P_\mu = 0$ für $t \to \pm\infty$, wenn die Felder für $t \to \pm\infty$ verschwinden, was von Pauli zur Bestimmung der Integrationskonstanten benutzt wurde. Im Grenzfall der lokalen Theorie,

$$F = \delta^4(x' - x'')\, \delta^4(x''' - x''),$$

erhält man aus dem letzten Summanden wieder den üblichen Ausdruck.

Wir können natürlich auch die in den Koordinaten symmetrische Form beibehalten und bekommen dann aus (27)

$$P_\mu^{(W)}(t) = \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''')$$
$$\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[F \frac{1}{2} \varepsilon(t' - t)\right] + \frac{\partial}{\partial x'''^\mu} \left[F \frac{1}{2} \varepsilon(t''' - t)\right] \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x''^\mu} \left[F \frac{1}{2} \varepsilon(t'' - t)\right] \right\}. \tag{30}$$

§ 4. Gesamtdrehimpuls

Zur Berechnung des Gesamtdrehimpulses

$$M_{\mu\lambda}^{(W)} \equiv \int (x_\lambda T_{\mu 0} - x_\mu T_{\lambda 0})\, d^3x \tag{31}$$

wollen wir in (18)

$$k'' = k - k' - k''', \quad dk'' = dk \tag{32}$$

substituieren.

Dann erhalten wir als e-Faktor

$$e^{-ik'(x' - x'') - ik'''(x''' - x'')}\, e^{ik(x - x'')} \tag{33}$$

und haben bei der Bildung von (31) statt des zweiten Faktors von (33)

$$\int x_\lambda\, e^{ik(x - x'')}\, d^3x$$
$$= (2\pi)^3 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k^\lambda} + x_\lambda''\right) \left(\delta^3(k)\, e^{-ik^0 t}\, e^{-ikx''}\right) \tag{34}$$

einzusetzen. Wir betrachten wieder zunächst die f-Terme von (18). Die Substitution (32) und der Faktor x_λ'' ändern an dem Ergebnis von (26) nichts. Wenn wir weiter $\partial/\partial k_\lambda$ herüberwerfen, so haben wir in (18) f, die eckigen Klammern und die Nenner mit der Substitution (32) zu differenzieren. Die Terme mit dem differenzierten f geben nach (26) Null.

Bei den verbleibenden Brüchen ergibt elementares Ausdifferenzieren nach Multiplikation mit $\delta^3(k)$ Ausdrücke, die symmetrisch in λ, μ sind und also bei der antimetrischen Bildung (31) herausfallen. Mithin gilt (22), wie behauptet, und wir brauchen nur noch die $\widetilde{F}$-Terme zu betrachten. Hier wollen wir die Substitution (32) nur bei dem dritten $\widetilde{F}$-Summanden in (18) anwenden und bei dem ersten bzw. zweiten k' bzw. k''' in analoger Weise durch k ausdrücken. Beim dritten $\widetilde{F}$-Summanden erhalten wir nach (34) einmal den Faktor x''_λ und dann den durch Herüberwerfen von $\partial/\partial k^\lambda$ entstehenden Ausdruck. Von diesem brauchen wir wegen der erwähnten Symmetrie in λ, μ den differenzierten Faktor $\widetilde{F}$ nicht zu berücksichtigen; $\widetilde{F}(-k'; -k''')$ selbst hängt aber nach (32) von k gar nicht ab, so daß der $\partial/\partial k^\lambda$-Term ganz herausfällt. Wir erhalten also nach (34), (33) für diesen dritten Summanden

$$\begin{aligned}\int x_\lambda T^{(W)''}_{\mu 0}\, d^3x &= \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ &\cdot \frac{1}{(2\pi)^9} \int d^4k'\, d^4k'''\, d^4k''\, x''_\lambda\, \delta^3(k) \qquad (35)\\ &\cdot \frac{\mathring{g}_{\mu 0} k_0 + k'_\mu + k''_\mu}{k^0}\, \widetilde{F}(-k'; -k''') \\ &\cdot e^{-ik'(x'-x'') - ik'''(x'''-x'') - ik^0 t - ikx''} + S(\lambda\mu),\end{aligned}$$

wobei die zwei Striche bei T den dritten Summanden und $S(\lambda\mu)$ symmetrische Terme in $\lambda\mu$ bedeuten sollen, und wo bei Ausrechnung des Bruches schon $\delta^3(k)$ berücksichtigt wurde. Nach Integration über d^3k geht $kx'' = \mathring{g}_{\mu\lambda} k^\lambda x^\mu$ in $-k^0 t$ über, so daß wir für den Zähler des Bruches wieder $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x''^\mu}$ schreiben können. Man sieht, daß wir genau den dritten Summanden von (27) mit $x''_\lambda u(x'')$ an Stelle von $u(x'')$ erhalten. Mithin können wir, da die übrigen beiden Summanden in ersichtlicher Weise durch cyclische Vertauschungen auseinander hervorgehen, das Ergebnis nach (30) hinschreiben, wenn wir bei Integration über k^0 den Hauptwert nehmen

$$\begin{aligned}M^{(W)}_{\mu\lambda}(t) &= \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \cdot \\ &\cdot \Big\{ \Big[x'_\lambda \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - x'_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \Big] \Big[F \frac{1}{2} \varepsilon(t'-t) \Big] \qquad (36)\\ &+ \Big[x'''_\lambda \frac{\partial}{\partial x'''^\mu} - x'''_\mu \frac{\partial}{\partial x'''^\lambda} \Big] \Big[F \frac{1}{2} \varepsilon(t'''-t) \Big] \\ &+ \Big[x''_\lambda \frac{\partial}{\partial x''^\mu} - x''_\mu \frac{\partial}{\partial x''^\lambda} \Big] \Big[F \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) \Big] \Big\},\end{aligned}$$

worin

$$F = F(x'\, x''\, x''') = F(x' - x''; x''' - x'').$$

Hierin kann man auch die ersten eckigen Klammern (mit geändertem Vorzeichen) auf die Feldfunktionen herüberwerfen. Wir können natürlich auch wieder eine Koordinate auszeichnen und setzen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x''^\mu}\Big[F \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) \Big] \\ &= \Big(-\frac{\partial F}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x'''^\mu} \Big) \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) + \delta^\mu_0 F \delta(t''-t).\end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}M^{(W)}_{\mu\lambda}(t) &= \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, F(x'\, x''\, x''') \\ &\cdot \Big[\Big\{ \frac{\partial \overline{\psi}(x')}{\partial x'^\lambda} \Big(x'_\mu \frac{1}{2} \varepsilon(t'-t) - x''_\mu \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) \Big) \\ &- \frac{\partial \overline{\psi}(x')}{\partial x'^\mu} \Big(x'_\lambda \frac{1}{2} \varepsilon(t'-t) - x''_\lambda \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) \Big) \Big\} \\ &\cdot u(x'')\, \psi(x''') \quad + \overline{\psi}(x')\, u(x'') \qquad (37)\\ &\cdot \Big\{ \frac{\partial \psi(x''')}{\partial x'''^\lambda} \Big(x'''_\mu \frac{1}{2} \varepsilon(t'''-t) - x''_\mu \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) \Big) \\ &- \frac{\partial \psi(x''')}{\partial x'''^\mu} \Big(x'''_\lambda \frac{1}{2} \varepsilon(t'''-t) - x''_\lambda \frac{1}{2} \varepsilon(t''-t) \Big) \Big\} \\ &+ \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''')\, \delta(t''-t) \big\{ x''_\lambda \delta^0_\mu - x''_\mu \delta^0_\lambda \big\} \Big].\end{aligned}$$

Wieder fallen im lokalen Grenzfalle die ε-Terme heraus, und es bleibt der dritte Summand, der dann den üblichen Term liefert.

Eigentlich entspricht jedoch dem Übergang von (30) nach (29) beim Translationsimpuls hier die Ausnutzung der Rotationsinvarianz von F. Schreiben wir F als Funktion der drei Variablen

$$s' = \sqrt{(x'' - x''')^2}, \quad s'' = \sqrt{(x''' - x')^2}, \quad s''' = \sqrt{(x' - x'')^2},$$

so wird

$$\frac{\partial F}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial F}{\partial s''} \frac{x'_\mu - x'''_\mu}{s''} + \frac{\partial F}{\partial s'''} \frac{x'_\mu - x''_\mu}{s'''} \quad \text{usw.}$$

Hiermit erhalten wir aus (36)

$$\begin{aligned}M^{(W)}_{\mu\lambda}(t) &= \int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ &\cdot \Big\{ \frac{1}{s'} \frac{\partial F}{\partial s'} (x''_\lambda x'''_\mu - x''_\mu x'''_\lambda) \frac{1}{2} \big(\varepsilon(t''-t) - \varepsilon(t'''-t) \big) \\ &+ \frac{1}{s''} \frac{\partial F}{\partial s''} (x'''_\mu x'_\lambda - x'''_\lambda x'_\mu) \frac{1}{2} \big(\varepsilon(t'''-t) - \varepsilon(t'-t) \big) \\ &+ \frac{1}{s'''} \frac{\partial F}{\partial s'''} (x'_\mu x''_\lambda - x'_\lambda x''_\mu) \frac{1}{2} \big(\varepsilon(t'-t) - \varepsilon(t''-t) \big) \\ &+ F \big[(x'_\lambda \delta^0_\mu - x'_\mu \delta^0_\lambda)\, \delta(t'-t) + (x''_\lambda \delta^0_\mu - x''_\mu \delta^0_\lambda)\, \delta(t''-t) \\ &+ \quad (x'''_\lambda \delta^0_\mu - x'''_\mu \delta^0_\lambda)\, \delta(t'''-t) \big] \Big\}. \qquad (38)\end{aligned}$$

Aus diesem Ausdruck sieht man, daß wieder nur Differenzen der ε-Funktionen eingehen, so daß auch beim Drehimpuls der Integrationsweg in der k^0-Ebene (siehe (28), (29)) gleichgültig war.

§ 5. Ladungsdichte und Gesamtladung

Zur Berechnung einer Ladungsdichte können wir in derselben Weise wie bei der Impulsdichte vorgehen. Bei Eichinvarianz kann man einer (lokalen) Lagrangeschen Dichte mit beliebig hohen Ableitungen eine Ladungsdichte zuordnen, indem man $\partial/\partial x_\mu$ durch $\partial/\partial x_\mu - ieA_\mu(x)$ bzw. das konjugiert komplexe ersetzt und an der „Stelle" $A_\mu \equiv 0$ nach A_μ variiert[5]:

$$j^\mu(x) = \frac{\delta \int L(x')\, d^4x'}{\delta A_\mu(x)}. \tag{39}$$

Wir gehen wieder von (16) aus und ersetzen

$$\Box^r \to \Box_A^r; \quad \Box^q \to \overset{*}{\Box}{}_A^q,$$

wobei

$$\Box_A \equiv \Box - 2ieA^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA^\mu{}_{|\mu} - e^2 A_\mu A^\mu \tag{40}$$

ist. Mit (an der „Stelle" $A_\mu \equiv 0$)

$$\delta \Box_A = -2ie\delta A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ie(\delta A^\mu)_{|\mu}$$

erhalten wir für einen Ausdruck der Form $\int \Phi(x) \Box^p \varphi(x)\, d^4x$:

$$j_\mu(x) = ie \sum_{m=0}^{p-1} [(\Box^m \Phi_{|\mu})(\Box^{p-m-1}\varphi) - (\Box^m \Phi)(\Box^{p-m-1}\varphi_{|\mu})].$$

Die Summation über m können wir im Fourier-Raum wie in (12), (13) ausführen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\tilde{j}_\mu(k) &= -\frac{e}{(2\pi)^4}\int d^4k'\, \tilde{\Phi}(k-k')\tilde{\varphi}(k)[(k-k')_\mu - k'_\mu] \\ &\quad\cdot \Sigma[(-(k-k')^2)^m(-k'^2)^{p-m-1}] \\ &= -\frac{e}{(2\pi)^4}\int d^4k'\, \tilde{\Phi}(k-k')\tilde{\varphi}(k')[(k-k')_\mu - k'_\mu] \\ &\quad\cdot \frac{(-(k-k')^2)^p - (-k'^2)^p}{-(k-k')^2 + k'^2}.\end{aligned}$$

Wir können nun genau wie in § 2 weiterrechnen, indem wir wieder zuerst

$$p = \varepsilon, \quad \Phi = (\Box^q \bar{\psi})(\Box^s u), \quad \varphi = \psi,$$

dann

$$p = q, \quad \Phi = (\Box^s u)(\Box^r \psi), \quad \varphi = \bar{\psi}$$

setzen und die entsprechenden Ausdrücke addieren, wobei zu beachten ist, daß die Variation von $\overset{*}{\Box}_A$ das umgekehrte Vorzeichen ergibt. Nach Summation über $q s r$ erhalten wir

$$\begin{aligned} j_\mu^{(W)}(x) &= e\int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \bar{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ &\cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}}\int d^4k'\, d^4k''\, d^4k''' \Big\{ [k''_\mu + k'''_\mu - k'_\mu] \\ &\cdot \frac{\tilde{F}(k''+k'''; -k''') - f(-k'^2; -k'''^2; -k''^2)}{-(k''+k''')^2 + k'^2} \\ &- [k'_\mu + k''_\mu - k'''_\mu] \\ &\cdot \frac{\tilde{F}(-k'; k'+k'') - f(-k'^2; -k'''^2; -k''^2)}{-(k'+k'')^2 + k'''^2} \Big\} \\ &\cdot e^{ik'(x-x') + ik''(x-x'') + ik'''(x-x''')}. \end{aligned} \tag{41}$$

Im Grenzfall der lokalen Theorie ist $\tilde{F} = f = 1$, also $j_\mu^{(W)}(x) = 0$.

Wir wollen das Verschwinden der Divergenz prüfen. Dabei fallen die f-Terme wieder identisch heraus, denn Multiplikation der eckigen Klammern mit $(k'^\mu + k''^\mu + k'''^\mu)$ ergibt gerade die jeweiligen Nenner mit umgekehrtem Vorzeichen. Es bleibt

$$\begin{aligned} j_\mu^{(W)|\mu}(x) &= ie\int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \bar{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ &\cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}}\int d^4k'\, d^4k''\, d^4k''' \\ &\cdot \{-\tilde{F}(k''+k'''; -k''') + \tilde{F}(-k'; k'+k'')\} \\ &\cdot e^{ik'(x-x') + ik''(x-x'') + ik'''(x-x''')} \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &= -ie\int d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, \bar{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\ &\quad\cdot F(x'\, x''\, x''')\{\delta^4(x-x') - \delta^4(x-x''')\}. \end{aligned}$$

Dies ist die Bedingung, die der zusätzliche Strom $j_\mu^{(W)}$ nach Kristensen-Møller [l. c.[1], Gl. (21)] zu erfüllen hat; aus den beiden Gleichungen, die sich aus (1) durch Variation von $\bar{\psi}$ und ψ ergeben, folgt nämlich sofort, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

gleich dem in (42) rechts stehenden Integral ist.

Bei Bildung der Gesamtladung

$$Q^{(W)}(t) = \varepsilon\int d^3x\, j^{(W)0}(x)$$

ergeben in (41) die eckigen Klammern dividiert durch die Nenner wegen des Faktors

$$\delta^3(k' + k'' + k''')$$

gerade $(k'^0 + k''^0 + k'''^0)^{-1}$, so daß die f-Terme herausfallen. Es bleibt

[5] T. S. Chang, Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 76 [1948].

$$
\begin{aligned}
Q^{(W)}(t) = e \int d^4 x'\, d^4 x''\, d^4 x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\
\cdot \frac{1}{(2\pi)^9} \int d^4 k'\, d^4 k''\, d^4 k''' \frac{1}{k'^0 + k''^0 + k'''^0} \\
\cdot \left\{ \widetilde{F}(k'' + k'''; -k''') - \widetilde{F}(-k'; k' + k'') \right\} \\
\cdot \delta^3 (k' + k'' + k''') \\
\cdot e^{-ik'x' - ik''x'' - ik'''x'''}\, e^{-it(k'^0 + k''^0 + k'''^0)},
\end{aligned}
$$

woraus sich in derselben Weise wie in (27)

$$
\begin{aligned}
Q^{(W)}(t) = i e \int d^4 x'\, d^4 x''\, d^4 x'''\, \overline{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x''') \\
\cdot F(x'\, x''\, x''') \frac{1}{2} \big(\varepsilon(t' - t) - \varepsilon(t'' - t) \big) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

ergibt, was man nach Pauli [l. c.[2], Gl. (12)] auch durch Integration von (42) erhalten kann.

Anhang

(Berücksichtigung der Spinor-Eigenschaft)

Wir haben in § 2 bei der kovarianten Verallgemeinerung des Ausdruckes (16) ψ und $\overline{\psi}$ als Skalare behandelt. Hiergegen ist nichts einzuwenden, da wir im Ergebnis (17), (18) diese Größen wieder als Spinoren einsetzen konnten und da das ganze Verfahren von Ôno nur ein Rechenverfahren zur Bestimmung eines Energie-Impuls-Tensors im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie ist. Kovariant im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie, aber nur ausgerechnet für den Spezialfall verschwindenden Gravitationsfeldes, würde unser Tensor dann sein, wenn man die Lagrange-Funktion in der lokalen Form (16) als Ausgangspunkt betrachtet, wobei unsere Verallgemeinerung skalaren Feldern ψ und $\overline{\psi}$ entsprach. Wir wollen uns in diesem Anhang davon überzeugen, daß sich an dem Ergebnis nichts ändert, wenn man bei der Verallgemeinerung ψ und $\overline{\psi}$ als Spinoren betrachtet, bzw. $\overline{\psi} i \gamma^5 \psi$ an Stelle von $\psi\, \psi$ einsetzt und u als Pseudoskalar ansieht. Von unserem Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie ist das in bezug auf die Frage der Eindeutigkeit von Interesse, die nicht bewiesen wurde; die Betrachtung der ψ als Spinoren liefert jedenfalls kein neues Ergebnis.

Da die Transformationseigenschaften von Spinoren nur für Lorentz-Transformationen gegeben sind, erfordert die kovariante Schreibweise von Ausdrücken mit Spinoren die Einführung von cartesischen Koordinatensystemen in jedem Raum-Zeit-Punkt[6], deren vier Achsen man durch vier zueinander orthogonale Einheitsvektoren

$$h_0^{u}(x),\; h_1^{u}(x),\; h_2^{u}(x),\; h_3^{u}(x)$$

festlegt, die man Vierbein nennt. Hiernach gilt

$$h_i^{u}\, g_{\mu\nu}\, \mu_k^{\nu} = h_i^{u}\, h_{k\mu} = \mathring{g}_{ik}. \qquad (A\,1)$$

Die Nummern der Vektoren bezeichnen wir nach Belinfante[7] mit lateinischen Indices und definieren ihr Heraufschieben in üblicher Weise durch $\mathring{g}^{kl}$, so daß aus (A 1) folgt

$$h_i^{u}\, h_{\mu}^{k} = \delta_i^{k}. \qquad (A\,2)$$

Ebenso bezeichnen wir die Komponenten eines Tensors (z. B. t^u) im lokalen System durch denselben Buchstaben mit lateinischen Indices (z. B. t^k); diese lokalen Komponenten sind dann gegeben durch

$$t^u = h_k^u\, t^k; \quad t^i = h_\nu^i\, t^\nu. \qquad (A\,3)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man stets von dem lokalen System (lateinische Indices) zum allgemeinen (griechische Indices) übergehen und umgekehrt; insbesondere kann man das metrische Feld $g_{\mu\nu} = h_\mu^k h_{k\nu}$ durch die Vierbeine ausdrücken.

Enthält die Lagrangesche Dichte die Vierbeine nur in Form der $g_{\mu\nu}$ bzw. deren Ableitungen, so ist der in (3) definierte Tensor $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_k^u} h_{k\nu}. \qquad (A\,4)$$

Es läßt sich zeigen[6], daß dies, als Definition für $T_{\mu\nu}$ betrachtet, auch dann einen symmetrischen und divergenzfreien Tensor ergibt, wenn L außer den Feldern noch explizit von den Vierbeinen und deren (beliebig hohen) Ableitungen abhängt. Die Symmetrie braucht beim Ausrechnen gemäß (A 4) nicht sofort in Erscheinung zu treten, da bei ihrer Begründung die Feldgleichungen benutzt werden; man definiert daher bequemer

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_k^u} h_{k\nu} + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h_k^\nu} h_{k\mu} \right). \qquad (A\,5)$$

Für die kovariante Ableitung einer Größe mit beliebigen griechischen und lateinischen Indices erhält man nach Belinfante[7]

$$q_{||\nu} = q_{;\nu} - \omega_{\nu k}{}^{l}\, S^k{}_{l\,\mathrm{op.}}\, q, \qquad (A\,6)$$

wobei das Semikolon die übliche kovariante Ableitung bezüglich der griechischen Indices bezeichnet:

$$\omega_\nu{}^l{}_k = -\omega_{\nu k}{}^l = h_\mu^l\, h_{k;\nu}^u, \qquad (A\,7)$$

und $S^k{}_{l\,\mathrm{op}}$ ein Operator ist, der die Änderung einer Größe mit lateinischen Indices bei einer infinitesimalen Drehung angibt:

$$\delta q = \varepsilon^l{}_k\, S_l{}^k{}_{\mathrm{op.}}\, q = \varepsilon_k{}^l\, S^k{}_{l\,\mathrm{op.}}\, q.$$

Mit den bekannten Ausdrücken

$$\varepsilon_{ml}\, S^{ml}_{\mathrm{op.}}\, \psi = \frac{1}{4} \varepsilon_{ml}\, \gamma^m \gamma^l \psi,$$

$$\varepsilon_{ml}\, S^{ml}_{\mathrm{op.}}\, \overline{\psi} = -\frac{1}{4} \varepsilon_{ml}\, \overline{\psi} \gamma^m \gamma^l$$

erhält man speziell

$$
\left.
\begin{aligned}
\psi_{||\nu} &= \psi_{|\nu} - \frac{1}{4} \omega_{\nu kl}\, \gamma^k \gamma^l \psi, \\
\overline{\psi}_{||\nu} &= \psi_{|\nu} + \frac{1}{4} \omega_{\nu kl}\, \overline{\psi} \gamma^k \gamma^l.
\end{aligned}
\right\} \qquad (A\,8)
$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß man für die Spinoren eine nach Belinfante „uniforme“ Darstellung benutzt, bei der die Dirac-Matrizen γ in jedem Raum-Zeit-Punkt gleich und invariant gegen Drehung des lokalen Systems sind, also

$$\gamma^k{}_{|\nu} = \gamma^k{}_{||\nu} = 0.$$

[6] H. Weyl, Z. Physik 56, 330 [1929].

[7] F. J. Belinfante, Physica 6, 305 [1940].

Wir haben nun als kovariante Verallgemeinerung von $\Box\psi$ zu schreiben $\Box_h\psi$, wobei

$$\Box_h\psi \equiv (g^{\mu\nu}\psi_{||\nu})_{||\mu}$$
$$= (g^{\mu\nu}\psi_{||\nu})_{|\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} g^{\alpha\nu}\psi_{||\nu} - \frac{1}{4}\omega_{\mu ij}\gamma^i\gamma^j\cdot\psi_{||\nu}.$$

Mit $\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{\sqrt{-g}_{|\alpha}}{\sqrt{-g}}$ und (A 8) wird das

$$\Box_h\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\psi_{|\nu})_{|\mu}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{1}{4}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\omega_{\nu kl}\gamma^k\gamma^l\psi)_{|\mu}$$
$$- \frac{1}{4}\omega_{\mu kl}\gamma^k\gamma^l\psi_{|\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{16} g^{\mu\nu}\omega_{\mu ij}\gamma^i\gamma^j\omega_{\nu kl}\gamma^k\gamma^l\psi. \tag{A 9}$$

$\Box_h\bar{\psi}$ ergibt sich in ersichtlicher Weise durch Vorzeichenumkehr von ω und Einsetzen von $\bar{\psi}$ vor die γ-Matrizen.

Aus dieser Form sieht man unmittelbar, daß man in der üblichen [in Gl. (19) benutzten] Weise partiell integrieren kann, d. h. daß

$$\int \bar{\psi}_{||\mu} g^{\mu\nu}\psi_{||\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$$
$$= -\int(\Box_h\bar{\psi})\psi\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = -\int\bar{\psi}(\Box_h\psi)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$$

ist. Wir können also in Gl. (16) $\Box_h$ nach (A 9) statt $\Box_g$ einsetzen. Dabei stehen dann statt ψ bzw. $\bar{\psi}$ Ausdrücke, die den gleichen Transformationscharakter haben, z. B. $(\overset{s}{\Box}_g u)$ $(\overset{q}{\Box}_h\bar{\psi})$ usw. Der erste Summand von (A 9) ist identisch mit $\Box_g\psi$ und gibt also nach (A 4) das alte Ergebnis. Wir betrachten deshalb nur die drei letzten Summanden und rechnen die Variation nach δh^k_μ an der „Stelle" von ebenem Raum-Zeit aus. An dieser Stelle können wir $h^{\mu}_{k}(x) = \delta^{\mu}_{k}$ wählen, so daß $\omega_{\nu kl} = 0$ wird. Wir brauchen deshalb nur ω selbst zu variieren, da die Variationen der übrigen Faktoren Ausdrücke mit ω als Faktor ergeben und folglich verschwinden. An der erwähnten Stelle haben wir nach (A 7)

$$\delta\omega_{\varrho ij} = h_{i\alpha}(\delta h^{\mu}_{k})_{;\varrho}\,\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{k}_{j} = \mathring{g}_{\mu i}\delta^{k}_{j}(\delta h^{\mu}_{k})_{|\varrho}.$$

Werfen wir nun unter dem Integral die Ableitung nach ϱ auf die ψ, $\bar{\psi}$ herüber und schreiben wir auf Grund der Antimetrie von ω

$$2\omega_{\varrho ij}\gamma^i\gamma^j = \omega_{\varrho ij}(\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i),$$

so erhalten wir, wenn wir gemäß der Bildung von (A 4) mit $h_{k\nu} = \mathring{g}_{k\nu}$ multiplizieren, Ausdrücke der Form

$$\mathring{g}_{k\nu}\mathring{g}_{i\mu}\delta^{k}_{j}(\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i) = \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu.$$

Da das Ergebnis aber symmetrisch in μ und ν ist, müssen die betreffenden Terme verschwinden.

Auch bei der kovarianten Schreibweise von u bzw. $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ als Pseudoskalare ändert sich am Ergebnis nichts. Zunächst können wir

$$u = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon(\alpha\beta\gamma\delta)\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{A 10}$$

setzen, wobei der Faktor von φ bekanntlich ein kontravarianter Einheitspseudotensor ist, wenn

$$\varepsilon(\alpha\beta\gamma\delta) = \begin{cases} 0 \text{ wenn zwei Indices gleich,} \\ 1 \text{ für } \varepsilon(0123) \text{ oder gerade Permutation des Indices,} \\ -1 \text{ für ungerade Permutation der Indices.} \end{cases} \tag{A 11}$$

Ferner soll $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein in allen vier Indices antimetrischer Tensor sein, d. h. sein Vorzeichen bei Vertauschung von zwei Indices wechseln. Dann läßt sich leicht nachrechnen, daß

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon(\alpha\beta\gamma\delta)(\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta||\nu}g^{\nu\mu})_{||\mu}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}u_{|\nu})_{|\mu} = \Box_g u$$

ist, d. h. $\Box_g$ ist auch für einen Pseudoskalar eine kovariante Verallgemeinerung.

Schließlich wollen wir noch $i\gamma^5$ allgemein kovariant schreiben, das im pseudoskalaren Falle zwischen $(\overset{q}{\Box}_h\bar{\psi})$ und $(\overset{r}{\Box}_h\psi)$, also zwischen Größen steht, die sich wie $\bar{\psi}$ und ψ transformieren. Wir setzen

$$\gamma^{ijlm} = \frac{1}{24}(\gamma^i\gamma^j\gamma^l\gamma^m - + \ldots), \tag{A 12}$$

wobei die Punkte Glieder mit den ungeraden bzw. geraden Permutationen der γ bedeuten sollen. ($\gamma^0 = \frac{1}{i}\gamma^4$, die Indices laufen wie immer von 0 bis 3). Dann ist

$$\bar{\psi}h^{\alpha}_{i}h^{\beta}_{j}h^{\gamma}_{l}h^{\delta}_{m}\gamma^{ijlm}\psi = \bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\psi$$

ein kontravarianter antimetrischer Tensor und

$$\bar{\psi}\frac{1}{24}\sqrt{-g}\,\varepsilon(\alpha\beta\gamma\delta)\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\psi \tag{A 13}$$

ein Pseudoskalar. (Läßt man in dem Produkt dieses Ausdruckes mit u (A 10) die beiden Pseudoeinheitstensoren weg, so ändert sich nichts und man hat das invariante Produkt zweier Tensoren; der gewöhnlichen Betrachtungsweise entspricht es aber, u und nicht $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ als Feldgröße zu betrachten.) Wir brauchen uns nur noch zu überzeugen, daß bei der Bildung von $T_{\mu\nu}$ nach (A 6) der von dem in (A 13) zwischen ψ und $\bar{\psi}$ stehenden Ausdruck herrührende Anteil verschwindet. Das ist aber sicher der Fall, weil dieser Ausdruck von h^{μ}_{k} gar nicht abhängt. Es ist nämlich wegen der antimetrischen Bildung (A 12)

$$\frac{1}{24}\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta} = h^{\alpha}_{0}h^{\beta}_{1}h^{\gamma}_{2}h^{\delta}_{3}\gamma^{0123} = h^{\alpha}_{0}h^{\beta}_{1}h^{\gamma}_{2}h^{\delta}_{3}\, i\gamma^5,$$

wobei die Ziffern bei γ im zweiten Term „lateinische" Indices sind. Folglich nach (A 11)

$$\frac{1}{24}\varepsilon(\alpha\beta\gamma\delta)\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathrm{Det}\,||h^{\mu}_{k}||\, i\gamma^5 = \frac{1}{\sqrt{-g}}i\gamma^5$$

und $\frac{1}{24}\sqrt{-g}\,\varepsilon(\alpha\beta\gamma\delta)\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta} = i\gamma^5$,

so daß also $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ auch ein allgemein kovarianter Pseudoskalar ist. —

Herrn Professor Heisenberg und Herrn Professor v. Weizsäcker möchte ich für die Anregung zu der vorliegenden Rechnung und verschiedene Unterhaltungen herzlich danken.